

## Una grande illusione (La "prova" di Gödel)

Gödel fu indubbiamente uno dei massimi matematici e logici del secolo scorso, e nulla sarebbe più ingiusto che accusarlo di essere stato men che intellettualmente onesto: non avrebbe certo potuto essere, come è stato, il migliore amico di Einstein a Princeton. Eppure, se la sua intenzione fosse stata di incantare, e illudere milioni di persone, compresi i cervelli più eminenti nel campo matematico, difficilmente avrebbe potuto farlo meglio di come ha fatto con i suoi famosi teoremi del 1931.

Di quei Teoremi c'è una pluralità di versioni; le loro interpretazioni però concordemente affermano che hanno dato un colpo mortale alla speranza di Hilbert di fondare la matematica su basi solide, al contempo stabilendo un limite invalicabile alle nostre possibilità di conoscenza, non solo nel campo matematico.

Così, per Palle Yourgrau,

Il teorema di incompletezza di Gödel - la «verità matematica più importante del secolo», come sarebbe stata descritta nel 1952 in una cerimonia alla Harvard University - fissò un limite permanente alla nostra conoscenza delle verità basilari della matematica: l'insieme completo delle verità matematiche non sarà mai compreso in alcun elenco finito o ricorsivo di assiomi che sia pienamente formale. Perciò nessun dispositivo meccanico, nessun computer sarà mai in grado di esaurire le verità della matematica. Ne segue immediatamente, come Gödel fu pronto a sottolineare, che se noi fossimo in grado di comprendere in qualche modo la verità completa in questo campo, ciò significherebbe che noi, o la nostra mente, non siamo macchine o computer. (Gli entusiasti dell'intelligenza artificiale non accolsero quest'affermazione di buon grado).<sup>(1)</sup>

Persino più che ai Teoremi, un'ammirazione incondizionata è tributata al metodo assolutamente inconsueto utilizzato da Gödel per dimostrarli. Dice sempre Yourgrau:

Non si era mai visto prima niente del genere. Gödel aveva eluso il mortale paradosso del mentitore, sostituendolo con un paradosso aproblematico dell'indimostrabilità (che in realtà non era affatto un paradosso); aveva stabilito la possibilità e l'innocuità dell'autoreferenza; aveva dimostrato che esistono relazioni di rappresentabilità fra tre linguaggi distinti; aveva aritmetizzato la sintassi di uno di quei linguaggi; e, infine, aveva esibito una formula di un linguaggio che era probabilmente dimostrabile e simultaneamente vera. Questa era logica, era matematica, ma non sembrava né logica né matematica. Assomigliava di più a Kafka. In effetti, quando il matematico Paul Cohen, un vincitore della Medaglia Fields che aveva dimostrato l'indipendenza dell'ipotesi del continuo, si imbatté per la prima volta nel teorema di Gödel, era scettico, e osservò che gli sembrava più simile alla filosofia che alla matematica. Dopo avere discusso sul problema col logico Steven Kleene, però, i suoi dubbi svanirono. Tuttavia in seguito commentò: «Ero piuttosto depresso quando mi resi conto che Gödel aveva ragione».<sup>(2)</sup>

Non poteva non lasciare perplesso, tanto più un matematico, che delle conclusioni tanto fondamentali sull'aritmetica si potessero ricavare quasi per miracolo da una vaga proposizione metamatematica che di aritmetica non parla, come "La proposizione  $G$  non è dimostrabile", dove  $G$  è la proposizione stessa.

Pur non essendo un matematico, per quello stesso motivo, come ingegnere e studioso di semiotica non potevo accettare senza riserve l'idea che, per quanto ingegnosa, di per sé l'aritmetizzazione operata da Gödel rivelasse qualcosa tanto nuovo e inaspettato come l'incompletezza dell'aritmetica, di cui non si vedeva traccia nei dati di partenza del Teorema. L'aritmetizzazione ideata da Gödel nella forma aritmetica dei gödeliani è pur sempre solo una transcodificazione, e per il principio saussuriano della "arbitrarietà del segno" e le ferree

leggi dell'informatica, di per sé nessuna transcodificazione dovrebbe permettere di far emergere alcunché di veramente significativo che non sia già presente. Ciò mi ha spinto a interessarmi al problema, per cercare di comprendere come un tale miracolo potesse realizzarsi.

Il principio della conservazione dell'informazione era per me inderogabile quanto quello di conservazione dell'energia; di fronte all'universale condivisione e incondizionata ammirazione tributata a Gödel e al metodo da lui seguito, non mi potevo però limitare ad appellarmi a quel principio: al pari dei tanti che in tutti questi anni pure intuivano che per forza ci doveva essere qualcosa che non va, anch'io ho ritenuto doveroso impegnarmi nell'improbabile tentativo di scoprire dove fosse il baco.

Per il compito, tutt'altro che facile per un non iniziato, di seguire Gödel negli ardui sentieri di suo dominio, mi è stata di grande aiuto una lunga anche se saltuaria corrispondenza col prof. Lolli dell'Università di Torino - uno dei pochi che ha letto Gödel nell'originale - che, rispondendo con grande cortesia e pazienza alle mie molto spesso ingenui obiezioni, mi ha più volte rimesso sul giusto cammino.

Dopo molti sbandamenti mi sono però reso conto di una verità molto più banale di quanto avessi mai potuto immaginare: Gödel aveva ragione, nel senso che nelle sue conclusioni non c'era l'errore che inutilmente vi cercavo, perché effettivamente egli "prova" che gli assiomi su cui si basano i *Principia Mathematica* sono incompleti, ma l'intuizione non mi aveva ingannato del tutto, perché un errore c'era effettivamente nell'interpretazione che usualmente si dà del reale significato della sua "prova", ed era anche piuttosto discutibile il metodo da lui seguito per arrivarvi.

\*

Detto in modo molto sintetico, col suo metodo molto originale, Gödel afferma che gli assiomi su cui si basano i *Principia Mathematica* di Russell e Whitehead non sono completi, mostrando che nel rispetto degli assiomi si può costruire una formula aritmetica né dimostrabile né refutabile.

Di fatto, per Gabriele Lolli,

Gödel ha fatto vedere come costruire un enunciato che, interpretato non come enunciato aritmetico quale è, ma come enunciato metateorico sul linguaggio, attraverso la codifica dell'aritmetizzazione, si legge «questo enunciato è indimostrabile», o se si vuole

«io sono indimostrabile».

Per fare questo occorre che nel linguaggio aritmetico esistano nomi di enunciati.

Supponiamo di aver costruito una formula  $Teor(x)$  che definisce l'insieme dei (gödeliani dei) teoremi della teoria oggetto aritmetizzata.

Supponiamo anche di aver definito  $not(x)$  come una funzione che a ogni (gödeliano di una) formula  $x$  associa (il gödeliano de) la negazione di  $x$ .

Se si pensa che il gödeliano sia il nome, ecco realizzato l'«io non sono dimostrabile».

Tale enunciato, chiamato enunciato di Gödel, risulta indimostrabile, e la sua negazione pure, sicché si ha l'incompletezza. Un enunciato per cui si verifichi questa situazione si dice *indecidibile* nella teoria.<sup>(3)</sup>

Non basta però *supporre* di aver costruito la formula e *pensare* "che il gödeliano sia il nome": questo deve essere proprio il significato della formula aritmetica transcodificata secondo le regole stabilite da Gödel; tutte le spiegazioni e volgarizzazioni della "prova" partono quindi necessariamente dall'espressione linguistica:

"La proposizione  $G$  non è dimostrabile" - dove  $G$  è la proposizione stessa, traducendola poi con le regole stabilite da Gödel nella corrispondente forma aritmetica del gödeliano  $g(G)$ .

Ritengono di poter così provare l'incompletezza degli assiomi dell'aritmetica, in quanto

tale gödeliano non risulta dimostrabile e nemmeno refutabile.

Sarebbe però quanto mai sorprendente, ed evidentemente errato, se così non fosse, perché l'espressione linguistica stessa  $G$ , che il gödeliano rappresenta, isolata com'è da qualsiasi contesto che giustifichi ciò che afferma: è un semplice *flatus vocis* privo di alcun reale significato, come tale né dimostrabile né refutabile.

Ugualmente privo di reale significato è anche negare l'esistenza di una dimostrazione mai prima per alcun motivo ipotizzata e nemmeno supposta, come - secondo tutti i resoconti - si deve necessariamente fare per tradurre la proposizione  $G$  nella forma aritmetica con le regole stabilite da Gödel, parafrasandola nella espressione considerata equivalente:

per ogni  $x$ , la sequenza di formule con numero di Gödel  $x$  non è una dimostrazione della formula con numero di Gödel  $z$ <sup>(4)</sup>.

La proposizione  $G$ , non dimostrabile né refutabile in quanto priva di reale significato, è essa stessa un assioma; transcodificandola in forma aritmetica, parimenti non dimostrabile né refutabile non può che essere anche l'espressione aritmetica risultante: è una considerazione elementare, ma che evidentemente pareva troppo semplice, per cui in tanti anni tale è sfuggita ai tanti che sulla "prova" si sono arrovellati, e a me stesso fino a una tardiva improvvisa illuminazione.

Calamitava invece l'attenzione, distogliendola dalla sostanziale banalità dell'assunto, il complesso e suggestivo, ma - come si dirà - anche discutibile procedimento seguito da Gödel per provarlo, basato sui paradossi, non soltanto non necessario, perché in sostanza non c'era nulla da dimostrare, ma persino fuorviante.

Di fronte a un ragionamento così autorevole, e inconsueto, non ci si poteva rifiutare di impegnarsi nel tentativo di seguirlo, e comprenderlo; e se poi - non a torto - non lo si trovava del tutto convincente, veniva persino spontaneo dubitare di ciò stesso, pure così ovvio, che Gödel intendeva dimostrare.

\*

Attribuire agli assiomi dell'aritmetica usata nella transcodificazione l'inconsistenza propria delle espressioni metamatematiche codificate, come in sostanza si fa nella "prova", è un po' come considerare assassino l'attore cui sul palcoscenico si fa dire "Ho ucciso!". Tuttavia, col suo metodo insolito, e discutibile, Gödel ha pur sempre messo in evidenza che negli assiomi su cui si basano i *Principia Mathematica* c'è una lacuna, perché consentono di esprimere in forma aritmetica proposizioni sostanzialmente prive di senso come  $G$ ; sotto quel particolare aspetto si possono quindi realmente considerare incompleti.

Fraindendo però la reale natura e portata di quella particolare incompletezza, anziché pensare - come parrebbe più che ragionevole - che si possa colmarla chiudendo il buco, ossia escludendo tali proposizioni dal legittimo ambito matematico, se ne ricavò la convinzione che tale carenza non fosse in alcun modo ovviabile; ebbe così origine il luogo comune secondo cui gli assiomi dell'aritmetica sono *essenzialmente* incompleti, ossia per principio incompletabili, con le relative estrapolazioni a tutti i rami della conoscenza.

Con questo non si vuole certo affermare che gli assiomi utilizzati come base per i *Principia Mathematica* siano completi, e nemmeno che siano completabili, tanto più che Turing, e dopo di lui diversi altri, hanno messo in evidenza altre situazioni che denunciano delle incompletezze veramente non colmabili; si tratta però di incompletezze di natura e origine ben differente da quella individuata da Gödel, verosimilmente ascrivibili all'intima informalità del linguaggio naturale in cui gli assiomi sono necessariamente formulati.

Nonostante ogni sforzo di precisione, per la loro stessa versatilità, i linguaggi naturali non possono esprimere in modo assolutamente completo le regole di un mondo rigorosamente formale come quello della matematica. La molto particolare incompletezza individuata da Gödel è invece colmabile senza troppa difficoltà, non certo raggiungendo  $G$

come assioma<sup>(5)</sup>, ma, al contrario, escludendo dal campo matematico proposizioni come quella, fine a se stesse e sostanzialmente campate in aria, né dimostrabili né refutabili, in quanto evidentemente mancanti degli elementi indispensabili per farlo.

L'evidenza è però pur sempre un dato necessariamente soggettivo, non dimostrabile né refutabile, tale esclusione non può quindi essere stabilita che da un apposito assioma.

\*

Come si è accennato, è discutibile è anche il procedimento stesso basato sui paradossi seguito da Gödel per dimostrare l'incompletezza degli assiomi, come pure l'uso dei paradossi come strumenti di dimostrazione su cui si basa.

Rientrano fra i paradossi le proposizioni obbedienti alle regole della grammatica e della sintassi, ma non della logica. Si dovrebbero quindi considerare tali proposizioni estranee a ogni discorso ragionevole, e *immaginarie* le situazioni cui si riferiscono; non soltanto, invece, i paradossi non vengono messi al bando, ma, con un'analogia, in questo caso verosimilmente impropria con gli immaginari matematici, grazie a Gödel sono assurti a strumenti dimostrativi ritenuti capaci di risultati assolutamente straordinari, e impensabili.

Dice infatti Gabriele Lolli:

Il pullulare delle antinomie era considerato da molti un argomento a sfavore dei concetti nuovi che si volevano introdurre nella matematica, da quelli insiemistici a quelli logici, soprattutto quelli relativi alla «definibilità»: non erano matematica.

Finché Gödel non ha eseguito la sua dimostrazione, questo è stato il sentimento più diffuso tra i matematici, di sospetto e fastidio per tali forme di ragionamento.

Con Gödel i paradossi sono rimessi all'onore del mondo. Sia scientifico che culturale, e vengono ad assumere un carattere positivo, come tecnica dimostrativa.<sup>(6)</sup>

E' una proposizione paradossale anche la *G*, di Gödel, isolata come è da ogni contesto che la giustifichi. Per la sua "prova" Gödel si ispira infatti al "paradosso del mentitore".

Come dice Douglas Hofstadter nel ben noto "Gödel, Escher, Bach":

La scoperta ad opera di K. Gödel di uno Strano Anello in un sistema matematico trae le sue origini da intuizioni semplici e antiche. La scoperta di Gödel, nella sua forma essenziale, comporta la traduzione in termini matematici di un antico paradosso della filosofia. Si tratta del cosiddetto *paradosso di Epimenide, o paradosso del mentitore*.<sup>(7)</sup>

Le molteplici versioni di quel paradosso sono tutte sostanzialmente riconducibili alla negazione in forma più o meno diretta di ciò stesso che si afferma. Secondo un ragionamento considerato indiscutibile, da "Questa frase è falsa", si può ricavare la tautologia:

"Questa frase è falsa è vera se (e solo se) è falsa",  
da cui la conclusione paradossale che

"Questa frase è vera se e solo se è falsa".

Se, però – come sarebbe doveroso - si mettono le virgolette per evidenziare che l'affermazione di falsità si riferisce alla proposizione "Questa frase è falsa" nel suo inseparabile insieme:

« 'Questa frase è falsa' è vera se (e solo se) è falsa »,  
impedendo la chiusura abusiva dell'anello le virgolette impediscono di ricavare dal paradosso qualunque conclusione significativa.

Ugualmente privo di un reale fondamento risulta anche il ragionamento analogo utilizzato da Gödel sostituendo la falsità con la dimostrabilità, per cui, secondo tutti i resoconti della sua "prova":

$G$  è dimostrabile se e solo se la sua negazione formale  $\sim G$  è dimostrabile<sup>(8)</sup>.

Da quella discutibile affermazione deriva la conclusione:

Allora, se una formula e la sua negazione sono entrambe dimostrabili, il calcolo aritmetico è contraddittorio.<sup>(9)</sup>

su cui Gödel fonda la presunta e discutibile “prova” di un’incompletezza che non ha alcun bisogno di essere provata:

Dato che  $G$  è vera e insieme formalmente indecidibile, gli assiomi dell’aritmetica non sono completi.  
(10)

\*

Sulla validità del metodo seguito nella “prova” basato sui paradossi, a Hofstadter è verosimilmente sorto qualche dubbio se, pur esaltando quanto mai l’opera di Gödel, nel recente “Anelli nell’Io” non fa più alcun riferimento al “paradosso del mentitore”. Egli dice invece, intendendo con  $KG$  il gödeliano:

Abbiamo appena scoperto un’anomalia molto strana all’interno di  $PM$ : c’è un enunciato aritmetico (o di teoria dei numeri, per essere un po’ più precisi) che siamo certi essere vero, e che pure siamo altrettanto certi essere indimostrabile – e ... questi due fatti che suonano contraddittori sono conseguenza l’uno dell’altro! In altre parole,  $KG$  è indimostrabile non solo benché sia vera ma, peggio ancora, perché è vera.

Il fatto che esista un enunciato di teoria dei numeri vero ma indimostrabile in  $PM$  significa ...che  $PM$  è incompleto, ha dei buchi. (Finora abbiamo visto soltanto un buco -  $KG$  - ma si può dimostrare che ce ne sono molti di più - a dire il vero un’infinità). Alcune affermazioni di teoria dei numeri che dovrebbero essere dimostrabili sfuggono alla vasta rete di dimostrazioni di  $PM$  - scivolano tra le sue maglie. ...

Un simile stato di cose non è certo quello che i matematici e i logici del 1931 si aspettavano. ... quindi la sua rivelazione dell’incompletezza di  $PM$  .. giunse come un fulmine improvviso dal più sereno dei cieli<sup>(11)</sup>.

Se, come “bucò”, si considera la possibilità di aritmetizzare una proposizione come  $G$ , di buchi ce ne sono effettivamente infiniti. Quand’anche in modo discutibile, Gödel ha effettivamente evidenziato che quel buco e anche infiniti altri simili buchi erano possibili nel sistema utilizzato come base per i  $PM$ ; l’anomalia è però solo di non aver previsto e preso in considerazione una tale possibilità. Il significato di tale scoperta era, ed è quindi tuttora assolutamente sopravvalutato rispetto alla sua effettiva rilevanza: in sostanza Gödel aveva rivelato la verità quasi lapalissiana che nemmeno il linguaggio dei numeri ha in se stesso alcun miracoloso antidoto contro un uso improprio.

Non prevedendo né evitando tale possibilità, gli assiomi dei  $PM$  hanno permesso che nascesse la grande illusione rappresentata dalla “prova” di Gödel e dai relativi metodi dimostrativi basati sui paradossi.

Non per nulla Hofstadter accosta Gödel a Escher. Lo “strano anello” che egli ravvisa nella “prova” ricorda realmente gli “strani anelli” che Escher raffigura nei suoi famosi disegni e litografie, molto suggestivi ma soltanto illusori, in quanto di situazioni impossibili, quali ad esempio gli anelli eternamente ascendenti o discendenti, che danno una sensazione molto efficace di moto perpetuo, in cui è difficile scoprire il carattere paradossale, e illusorio, che però c’è necessariamente, o le “mani che disegnano”, che meglio ricordano lo “strano anello del “mentitore”.

Riconoscendo il carattere illusorio degli “strani anelli” di Escher, Hofstadter si domanda:

Ma allora esisterà uno strano anello autentico - una struttura paradossale che nondimeno appartiene senza ombra di dubbio al mondo in cui viviamo - o i cosiddetti strani anelli sono sempre solo illusioni che non fanno altro che sfiorare il paradosso, sempre solo fantasie che semplicemente flirtano con il paradosso, sempre solo ammalianti bolle che inevitabilmente scoppiano quando ci avviciniamo troppo? ...

Fortunatamente, strani anelli che non sono illusioni esistono davvero. Dico «fortunatamente», perché la tesi di questo libro è che noi stessi - non i nostri corpi, ma i nostri sé - siamo degli strani anelli e quindi, se tutti gli strani anelli fossero illusioni, allora noi tutti saremmo delle illusioni, e questo sarebbe un vero peccato.<sup>(12)</sup>

L'anello che Hofstadter vede in noi non è del tutto immaginario, ma ha ben poco a che fare con quello, necessariamente solo passivo, delle proposizioni autoreferenziali, come quella "del mentitore".

Quella che egli chiama "la grande potenza rappresentazionale dei numeri interi"<sup>(13)</sup>, in nessun modo può trascendere quella del linguaggio che i numeri sono incaricati di rappresentare.

Senza la partecipazione attiva della mente, nulla di significativo potrebbe uscire da quella specie di buchi neri che sono le proposizioni autoreferenziali. Ma se la nostra mente ci si mette di mezzo, può anche far nascere una grande illusione come quella rappresentata dalla "prova".

\* \* \*

1) Palle Yourgrau: "Un mondo senza tempo" – Milano, Il Saggiatore 2006, p. 8.

2) Ibid., p. 70.

3) Umberto Bottazzini: "Il flauto di Hilbert" – Torino, UTET 2003, pp. 416-17.

3) Gabriele Lolli: "Da Euclide a Gödel" – Bologna, Il Mulino 2004, p. 129.

4) A pp. 94-95 di "La prova di Gödel" – Torino, Boringhieri,

5) Dicono Nagel e Newman ibid. a pp. 100-101: "Abbiamo appena dimostrato che  $G$  è una formula vera dell'aritmetica non deducibile formalmente nell'ambito di quest'ultima, ne segue che gli assiomi dell'aritmetica sono incompleti (nell'ipotesi, naturalmente, che essi siano coerenti). Di più, essi sono essenzialmente incompleti: anche se  $G$  fosse aggiunta come un ulteriore assioma, l'insieme più ampio non sarebbe ancora sufficiente a fornire tutte le verità aritmetiche. Infatti, se gli assiomi iniziali fossero completati nella maniera suggerita, sarebbe possibile costruire nel sistema più ampio un'altra formula vera ma indecidibile; una tale formula potrebbe essere costruita ripetendo semplicemente, nel nuovo sistema, il procedimento usato originalmente per trovare una formula vera ma indecidibile nel sistema iniziale. Questa conclusione notevole è valida a prescindere da qualsiasi estensione possibile del sistema iniziale. Siamo dunque costretti ad ammettere una fondamentale limitazione nelle possibilità del metodo assiomatico. Contro le precedenti ipotesi, la vasta regione della verità aritmetica non può essere ridotta a un ordine sistematico enunciando, una volta per tutte, un insieme di assiomi da cui dedurre formalmente tutte le proposizioni aritmetiche vere".

6) A p. 127 del libro della nota 3.

7) Milano, Adelphi, 1990, p. 16.

8) p. 93 del libro della nota 5. Formulazioni del tutto equivalenti della dimostrazione si trovano in tutti i più autorevoli resoconti.

9) Ibid., stessa pagina.

10) Ibid., stessa pagina.

12) Milano, Mondadori, p. 134 .

13) Ibid., p. 202.